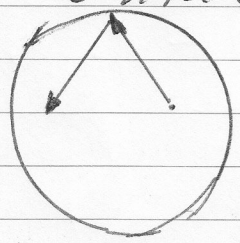
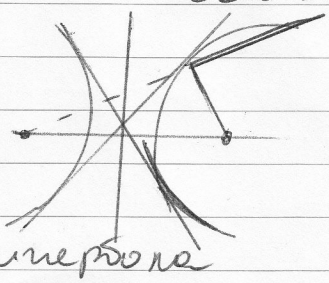
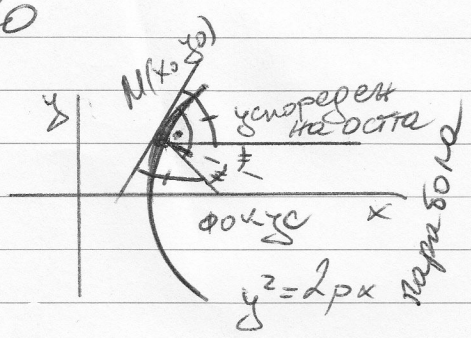
АГ	Иванов	08.01.13

Оптично свойство







Вземаме допирателната на параболата

$M(x_0, y_0) \in P : y_0^2 = 2px_0$ — допирателна на параболата

t_0 - допирателна на т. M_0

$t_0 : F_1(M_0)x_0 + F_2(M_0)y_0 + F_3(M_0) = 0$

от $y^2 = 2px \Rightarrow y^2 - 2px = 0$

$F_1(M_0) = -p$
$F_2(M_0) = y_0$
$F_3(M_0) = -px_0$

$\Rightarrow t : -px + y_0 y - px_0 = 0$

Оптично свойство

Нормалният вектор $\vec{n}_{t_0}(-p, y_0)$

$\overrightarrow{M_0F} = \left(\frac{p}{2} - x_0, y_0\right)$; $\vec{e}_1(1,0)$

$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{M_0F}\,\vec{n}_{t_0}) = \dfrac{\overrightarrow{M_0F}\,\vec{n}_{t_0}}{|\overrightarrow{M_0F}||\vec{n}_{t_0}|} =$

$\overrightarrow{M_0F}\,\vec{n}_{t_0} = \left(-\frac{p}{2} + px_0, -y_0^2\right)$; $|\overrightarrow{M_0F}| = \sqrt{\overrightarrow{M_0F}^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2}$

$|\vec{n}_{t_0}| = \sqrt{n_{t_0}^2} = \sqrt{p^2 + y_0^2}$; $\cos\sphericalangle(\vec{e}_1\,\vec{n}_{t_0}) = \dfrac{\vec{e}_1\,\vec{n}_{t_0}}{|\vec{e}_1||\vec{n}_{t_0}|} = \dfrac{-p}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}$

от $\dfrac{\overrightarrow{M_0F}\,\vec{n}_{t_0}}{|\overrightarrow{M_0F}||\vec{n}_{t_0}|} = \dfrac{-\frac{p^2}{2} + px_0 - y_0^2}{\sqrt{(p^2 + y_0^2)\left[\left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2\right]}}$

разгледаме $p^2 + y_0^2 = 2px_0 + p^2 = p(2x_0 + p)$ [от формула $y_0^2 = 2px_0$] $\Rightarrow$

разгледаме $-\frac{p^2}{2} + px_0 - 2px_0 = -\frac{p^2}{2} - px_0 = -p\left(\frac{p}{2} + x_0\right)$

$$\frac{-p\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)}{\sqrt{p(p + 2x_0)\left[\frac{p^2}{4} + x_0^2 - px_0 + 2px_0\right]}} = \frac{-p\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)}{\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)\sqrt{2p\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)}} = \frac{-p}{\sqrt{p(2x_0 + p)}}$$

$$\cos \measuredangle^{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{M_0F}\ \overrightarrow{n_{t_0}}) = \cos \measuredangle^{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{e_1}\ \overrightarrow{n_{t_0}}) \Rightarrow$$

$$\measuredangle(\overrightarrow{M_0F}\ \overrightarrow{n_{t_0}}) = \measuredangle(\overrightarrow{e_1}\ \overrightarrow{n_{t_0}})$$

Метрична класификация и метрични канонични уравнения на повърхнини от втора степен

$K = O e_1 e_2 e_3$ Нека повърхнината Π е у-е

$$\Pi: F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & \text{минор } A_{44} & & \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right)$$

Искаме $A_{44}\vec{p} = s\vec{p} \Leftrightarrow (A_{44} - sE_4)\vec{p} = 0$

Преминаваме към нови базиси и да намерим собствените стойности. Правим транслацията

$\det(A_{44} - sE_4) = 0$ - характеристичен полином

Търсим поне две собствени вектора. Нека собствените числа са $s_1 s_2 s_3 \in \mathbb{R}$. Намираме три собствени ортогонални вектора

$(A_{44} - s_1E_4)\vec{p_1} = 0 \to \vec{p_1}$

$(A_{44} - s_2E_4)\vec{p_2} = 0 \to \vec{p_2}$

$(A_{44} - s_3E_4)\vec{p_3} = 0 \to \vec{p_3}$

$\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}$ обаче може и да не са перпендикулярни

$$\vec{e_1^*} = \frac{\vec{p_1}}{|\vec{p_1}|};\ \vec{e_2^*} = \frac{\vec{p_2}}{|\vec{p_2}|};\ \vec{e_3^*} = \frac{\vec{p_3}}{|\vec{p_3}|}$$ така че

$e_1 e_2 e_3$ - ортонормирани и $K^* = O^* = O\vec{e_1^*}\vec{e_2^*}\vec{e_3^*}$

$$\begin{pmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$ T^t - ортогонална матрица задължително т.е. $T^{-1} = T^t$

$x^t e = x^t e^* = x^* T^t e \Rightarrow x = Tx^* \Rightarrow \Pi^*$ има вида

$$\Pi^*: s_1x^{*2} + s_2y^{*2} + s_3z^{*2} + 2a_{14}^*x^* + 2a_{24}^*y^* + 2a_{34}^*z^* + a_{44}^* = 0$$

a_{44} не се променя т.е. $a_{44} = a_{44}^*$

Правим транслация

$\bar{K} = \bar{O} e_1^* e_2^* e_3^*$ така че $x^* = \bar{x} + \alpha$, $\xi^* = \bar{\xi} + \beta$, $z^* = \bar{z} + \gamma$

$\bar{\Pi}: S_1\bar{x}^2 + S_2\bar{\xi}^2 + S_3\bar{z}^2 + \bar{x}(2S_1\alpha + 2a_{14}^*) + \bar{\xi}(2S_2\beta + 2a_{24}^*) +$

$+ \bar{z}(2S_3\gamma + 2a_{34}^*) + \underbrace{S_1\alpha^2 + S_2\beta^2 + S_3\gamma^2 + 2a_{14}^*\alpha + 2a_{24}^*\beta + 2a_{34}^*\gamma + a_{44}^*}_{\bar{a}_{44}} = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ \xi \\ z \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x^* \\ \xi^* \\ z^* \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \bar{x}+\alpha \\ \bar{\xi}+\beta \\ \bar{z}+\gamma \end{pmatrix}$$ разглеждаме само случаите с $S_1 S_2 S_3$

2сл $S_1 S_2 S_3 \neq 0$

Избираме $\alpha\beta\gamma$ да унищожат линейните части т.е.

$$\left.\begin{aligned} S_1\alpha + a_{14}^* &= 0 \\ S_2\beta + a_{24}^* &= 0 \\ S_3\gamma + a_{34}^* &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{S_1\bar{x}^2 + S_2\bar{\xi}^2 + S_3\bar{z}^2 + a_{44} = 0} \quad \Phi$$

2сл $S_1 S_2 \neq 0 \quad S_3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} S_1\alpha + a_{14}^* &= 0 \\ S_2\beta + a_{24}^* &= 0 \end{aligned}\right\}$$ при $S_3 = 0$ няма два поредицата

1 подсл $a_{34}^* \neq 0 \Rightarrow$ определяме γ така че свободният член да е 0 т.е. $a_{44} = 0$

$$\boxed{S_1\bar{x}^2 + S_2\bar{\xi}^2 + 2a_{34}^*\bar{z} = 0} \quad \Phi$$

2 подсл $a_{34}^* = 0 \Rightarrow$ вземаме $\gamma = 0$

$$\boxed{S_1\bar{x}^2 + S_2\bar{\xi}^2 + a_{44} = 0} \quad \Phi$$

3сл $S_2 \neq 0 \quad S_2 S_3 = 0 \Rightarrow$ определяме $S_1\alpha + a_{14}^* = 0$

1 подсл $a_{24}^*, a_{34}^* = 0 \Rightarrow \boxed{S_1\bar{x}^2 + a_{44} = 0}$ Φ

2 подсл $a_{34}^* \neq 0 \Rightarrow$

$$S_1\bar{x}^2 + 2a_{24}^*\bar{\xi} + 2a_{34}^*\bar{z} = 0$$

Определяме δ от $a_{44} = 0$. Искаме ортогонална трансформация за която

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{\bar{x}} \\ \bar{\xi} &= \cos\delta\,\bar{\bar{\xi}} - \sin\delta\,\bar{\bar{z}} \\ \bar{z} &= \sin\delta\,\bar{\bar{\xi}} + \cos\delta\,\bar{\bar{z}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &2a_{24}^*(\cos\delta\,\bar{\bar{\xi}} - \sin\delta\,\bar{\bar{z}}) + 2a_{34}^*(\sin\delta\,\bar{\bar{\xi}} + \cos\delta\,\bar{\bar{z}}) = \\ &= 2\bar{\bar{\xi}}(a_{24}^*\cos\delta + a_{34}^*\sin\delta) + 2\bar{\bar{z}}(-a_{24}^*\sin\delta + a_{34}^*\cos\delta) \end{aligned}$$

делим на $a_{34}^* \Rightarrow \operatorname{tg}\delta = -\dfrac{a_{24}^*}{a_{34}^*} \Rightarrow$ толкова

$S_1\bar{x}^2 + 2\bar{a}_{24}\bar{y} + 2\bar{a}_{34}\bar{z} = 0$ има вида $S_1\bar{x}^2 + 2\bar{a}_{34}\bar{z} = 0$

Т1 С ортонормирана спряна координатна система, всяка повърхнина от втора степен може да се докара до един от следните 17 вида

① $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ елипсоид

② $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ имагинарен елипсоид

③ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ строст хиперболоид 

④ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ двоен хиперболоид

⑤ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ конус

⑥ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ имагинарен конус

⑦ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ елиптичен параболоид 

⑧ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ хиперболичен параболоид 

⑨ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ елиптичен цилиндър

⑩ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ имагинерен елиптичен цилиндър

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ хиперболичен цилиндър

⑫ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ две реални пресичащи се равнини

⑬ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ две комплексно спрегнати равнини

⑭ $x^2 = 2pz$ параболичен цилиндър

⑮ $x^2 = a^2$ две реални успоредни равнини

⑯ $x^2 = -a^2$ две комплексно спрегнати успоредни равнини

⑰ $x^2 = 0$ една двойна равнина